



SOUTIEN II

MÉTHODES D'ALGÈBRE LINÉAIRE.

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES.

EXERCICE 1

Résoudre les systèmes suivants.

$$1. \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 4x + 4y + z = 0 \\ 6x + 7y + 2z = 0 \end{cases}.$$

$$2. \begin{cases} 3x - 3y - 2z = 0 \\ -4x + 4y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}.$$

$$3. \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} 2x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

$$5. \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 4x - y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases}.$$

Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$,

$$\frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES.

EXERCICE 2

Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle est la valeur propre associée ?

EXERCICE 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que 4 est valeur propre de A . Quel est l'espace propre associé ?

EXERCICE 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 - 4A = 0$. En déduire le spectre de A .

SOUS-ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES.

EXERCICE 5

Les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^3 sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$.
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 1\}$.
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - 2z = 0\}$.

EXERCICE 6

1. Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes.

a.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y + 3z, x + y + z, x - y + z) \end{array} .$$

b.

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + 2^t M \end{array} .$$

2. Écrire la matrice de f et de g dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ respectivement. Choisir deux autres bases quelconque de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et réécrire les matrices de f et g dans ces autres bases.